数式処理の発想を利用した数学教育の試み (数学ソフトウェアと教育 : 数学ソフトウェアの効果的利用に関する研究)

四ツ谷, 晶二

数理解析研究所講究録
第 1780 巻 2012 年 55-63

数式処理の発想を利用した数学教育の試み

龍谷大学・理工学部　四ツ谷晶二 (Shoji Yotsutani)
Fuculty of Science and Technology,
Ryukoku University

1　はじめに

2009 年度のこの研究集会において，数式処理システムを用いた，完全楕円積分の商 E/K の上下からの比較関数の構成法について報告をした．$\sqrt{1-k^2}$ と E(k)/K(k) のマクロリン展開を組み合わせた上下からの比較関数を構成するものであった．しかし，

$$\frac{\mathrm{E}(k)}{\mathrm{K}(k)} \sim \frac{1}{\log(4(1-k^2)^{-1/2})} \qquad as\ k\ \to 1-0$$

であり，$k=1$ での特異性のため応用上は不十分であった．

前半部分では，まず，相加・相乗平均を用いたガウスによる高精度の近似計算法を利用した，分数冪 $(1-k^2)^{1/2^n}$ $(n=1,2,\cdots)$ を用いた比較関数を紹介する．

後半部分では，多項式の零点の個数を決定する，Sturm の定理のアイデアをわかりやすく説明するひとつの方法を紹介する．その方法は，高校の２次関数等の教育において別の観点や指導法を与えることを可能とする．

2　完全楕円積分の商の近似について

Cahn-Hilliard 方程式等の解の大域的分岐構造を調べる際, 第１種完全楕円積分 $\mathrm{K}(k)$, 第２種完全楕円積分 $\mathrm{E}(k)$, および k からなる有理式の増減，値域を調べる問題に出会う ([2])．応用上，特に K, E に関する斉次式の場合が重要である．この場合，E/K を上下から挟むことにより，２変数多項式に関する種々の標準的な手法が利用でき解析可能となる．ここで，第１種, 第２種完全楕円積分は次式で定義される．

$$\mathrm{K}(k) := \int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}, \quad \mathrm{E}(k) := \int_0^{\pi/2} \sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}\, d\varphi.$$

先に述べたように，2009 年度のこの研究集会おいて，$\sqrt{1-k^2}$ と E/K のマクロリン展開を組み合わせた上下からの比較関数を報告したが，$k=1$ での特異性のため応用上は不十分であった．

相加・相乗平均を用いたガウスによる，古典的な高精度近似計算法を利用した分数冪 $(1-k^2)^{1/2^n}$ $(n=1,2,\cdots)$ による比較関数を紹介する．

まず, $\mathrm{E}(k)/\mathrm{K}(k) \to 0$ $(k \to 1-0)$ であるから，$\mathrm{E}(k)/\mathrm{K}(k)|_{k=1} := 0$ と定義すると，$\mathrm{E}(k)/\mathrm{K}(k)$ は 閉区間 $[0,1]$ で連続な関数となる．

任意の $a > b > 0$ に対して，算術・幾何平均の漸化式

$$a_{\ell+1} = \frac{a_\ell + b_\ell}{2}, \quad b_{\ell+1} = \sqrt{a_\ell b_\ell}, \quad c_{\ell+1} = \frac{a_\ell - b_\ell}{2} \quad (\ell = 0, 1, 2, 3, \cdots)$$
$$a_0 = a, \ b_0 = b, \ c_0 = \sqrt{a^2 - b^2}.$$

を考える．極限値を AGM(a,b) とかく．1818 年，Gauss は次を得た ([3],[1]).

Theorem A. $a = 1$, $b = \sqrt{1-h}$ とする．このとき，

$$\frac{\mathrm{E}(\sqrt{h})}{\mathrm{K}(\sqrt{h})} = 1 - \sum_{\ell=0}^{\infty} 2^{\ell-1} c_\ell^2.$$

この定理は，AGM(a,b) と完全楕円積分との関係を調べるなかで発見されたものである．右辺は h の関数である．これより，上からの比較関数はごく自然に，下からの比較関数は若干の補正で得られる ([4]).

Theorem. 関数を

$$\underline{g}_n(h) := 1 - \sum_{\ell=0}^{n} 2^{\ell-1} c_\ell^2 - 2^{n-1} c_n^2, \qquad \overline{g}_n(h) := 1 - \sum_{\ell=0}^{n} 2^{\ell-1} c_\ell^2$$

で定義する．このとき，次の事実が成立する．

1) 任意の非負の整数 n に対して, 次の評価式が成り立つ:

$$\underline{g}_n(h) \le \mathrm{E}(\sqrt{h})/\mathrm{K}(\sqrt{h}) \le \overline{g}_n(h) \quad h \in [0, 1].$$

なお，$\underline{g}_n(h)$ との等号成立は $h = 0, 1$ の場合のみであり, $\overline{g}_n(h)$ との等号成立は $h = 0$ の場合のみである.

2) $\underline{g}_n(h)$, $\overline{g}_n(h) \quad \rightrightarrows \quad \mathrm{E}(\sqrt{h})/\mathrm{K}(\sqrt{h}) \quad \textit{uniformly on } [0,1] \quad \textit{as } n \to \infty.$

具体的に，$\underline{g}_n(h)$, $\overline{g}_n(h)$ $(n = 1, 2, 3)$ を示す.

$$\begin{aligned}
\underline{g}_0(h) &= 1 - h, & \overline{g}_0(h) &= 1 - \frac{h}{2}, \\
\underline{g}_1(h) &= (1-h)^{1/2}, & \overline{g}_1(h) &= \frac{1}{2} - \frac{h}{4} + \frac{(1-h)^{1/2}}{2}, \\
\underline{g}_2(h) &= (1-h)^{1/4} + (1-h)^{3/4} & \overline{g}_2(h) &= \frac{1}{4} - \frac{h}{8} - \frac{(1-h)^{1/2}}{4} \\
&\quad -(1-h)^{1/2}, & &\quad + \frac{(1-h)^{1/4}}{2} + \frac{(1-h)^{3/4}}{2}.
\end{aligned}$$

関数 $1/K(k)$ にも，同様の高精度な近似関数が構成されることがわかる.

上記の方法を，数式処理システムと組合わせれば，いくらでも高精度に近似式を自動的に生成することができる.

3 Sturmの定理とは

話題を全くかえて，多項式の零点の個数を決定する，Sturmの定理とその証明のアイデアをわかりやすく説明し，教育に利用する試みについて説明したい．

Sturmの定理を説明するためにはSturm列が不可欠である．このため，ユークリッドの互除法を思い出す．互除法は2つの自然数の最大公約数を簡単かつ高速にもとめるアルゴリズムである．互除法は多項式の共通因子のうちで最大の次数のものを求める問題にもそのまま適用することができる．

例として，多項式

$$f(x) := x^3 + x^2 - 3x + 1$$

を考える．$f(x) = 0$ が重解をもつかどうを判定しよう．この判定のためには，$f(x)$ と

$$f'(x) := 3x^2 + 2x - 3$$

の共通因子を求めればよい．これらに対してユークリッドの互除法を適用すると

$$\begin{aligned} f(x) &= \left(\frac{x}{3} + \frac{1}{9}\right) f'(x) + \left(-\frac{20}{9}x + \frac{4}{3}\right) \\ f'(x) &= \left(-\frac{27}{16}x - \frac{171}{100}\right)\left(-\frac{20}{9}x + \frac{4}{3}\right) + \left(-\frac{18}{25}\right) \end{aligned}$$

を得る．よって，最大共通因子は $-2763/256$ である．したがって，$f(x) = 0$ と $f'(x) = 0$ は共通解を持たない．ゆえに，$f(x) = 0$ は重解を持たない．

ユークリッドの互除法の計算において，余りの項をわざわざマイナスにして得られる関数列をSturm列という．例えば，上記の場合では

$$\begin{aligned} f(x) &= \left(\frac{x}{3} + \frac{1}{9}\right) f'(x) - \left(\frac{20}{9}x - \frac{4}{3}\right) \\ f'(x) &= \left(\frac{27}{16}x + \frac{171}{100}\right)\left(\frac{20}{9}x - \frac{4}{3}\right) - \frac{18}{25} \end{aligned}$$

と書き直すことができるので，Sturm列は

$$f(x),\ f'(x),\ \frac{20}{9}x - \frac{4}{3},\ \frac{18}{25}$$

である．

スツルムの定理 実係数の代数方程式 $f(x) = 0$ が重解をもたず，$f(a) \neq 0$ かつ $f(b) \neq 0$ とする．このとき区間 (a, b) における零点の個数は

$$V(a) - V(b)$$

である．ただし,$V(x)$ は符号変化数である．なお，符号変化の回数を数えるとき，途中に0が現れた場合はないものと思うことにする

スツルムの定理とは, 実係数をもつ方程式が与えられた区間 (a, b) の中にいくつの実根をもつかを決定するためのものである. 多項式 $f(x)$ とその導関数 $f'(x)$ にユークリッドの互除法を行い最大公約因子を求め, $f(x)$ を最大公約因子で割ることによって重解となる部分は取り除く事が出来る. 更に, $f(a) \neq 0$ かつ $f(b) \neq 0$ としていい. もし $f(a) = 0, f(b) = 0$ であれば, もともと因数 $x - a, x - b$ をもつので, $f(x)$ をそれで割っておけばいい. そのため多項式 $f(x)$ とその導関数 $f'(x)$ は互いに素であり, 方程式 $f(x) \neq 0$ を重解をもたないという状況で, さらに $f(a) \neq 0$ かつ $f(b) \neq$ であるとする. このとき前項で説明したユークリッドの互除法を実行すると最後の余は0ではない定数である.

例 区間 (-2,2) における, 方程式

$$x^3 + x^2 - 3x + 1 = 0$$

の実数解の個数を求めてみよう.

まず,

$$f(x) := x^3 + x^2 - 3x + 1$$

とおく. 前例より方程式 $f(x) = 0$ は重解をもたない. また

$$f(-2) = 3 \neq 0, \quad f(2) = 7 \neq 0$$

である. 上でみたように, スツルム列は $\{f_0(x), f_1(x), f_2(x), f_3(x), \}$ である. ただし,

$$\begin{aligned} f_0(x) &= f(x), \qquad f_1(x) = f'(x) = 3x^2 + 2x - 3, \\ f_2(x) &= \frac{20}{9}x - \frac{4}{3}, \quad f_3(x) = \frac{18}{25}. \end{aligned}$$

前節で求めたスツルム列に $x = \pm 2$ を代入する.

$$\begin{aligned} f_0(-2) &= 3,\ f_1(-2) = f'(x) = 5,\ f_2(-2) = -\frac{52}{9},\ f_3(-2) = \frac{18}{25}, \\ f_0(2) &= 7,\ f_1(2) = f'(x) = 13,\ f_2(2) = -\frac{28}{9}, \quad f_3(2) = \frac{18}{25} \end{aligned}$$

となる. よって

	f_0	f_1	f_2	f_3	V
$x = -2$	$+$	$+$	$-$	$+$	2
$x = 2$	$+$	$+$	$+$	$+$	0

となり

$$V(-2) = 2,\ V(2) = 0$$

である. したがって,

$$V(-2) - V(2) = 2$$

を得る. 以上より, 区間 $(-2, 2)$ における実数解の個数は2個である.

4 Sturmの定理の証明のアイデア

これまで，多くの本にSturmの定理の証明が紹介されているが，抽象的に書かれていて，なかなか腑に落ちたとはいいにくいものである．高校生や大学生にも納得してもらえるような説明を探していたが，ひとつの説明法を思いついたので以下で紹介したい．

ポイントは1次式，2次式の場合にしっかり納得することが大切で，一旦そこを納得してしまえば，一般の場合も容易に想像がつくようになるということである．

多項式 $f(x)$ が1次式, 2次式の場合に, 具体的に $V(x)$ の動きを調べてみれば定理の背後にあるものを納得できるのである．

まず，1次式の場合を考えよう．

1次式の場合

$$f(x) = px + q$$

とする．

$p > 0$ のとき

	$\cdots$	q/p	$\cdots$
$f(x)$	$-$	0	$+$
$f'(x)$	$+$	$+$	$+$
$V(x)$	1	0	0

$p < 0$ のとき

	$\cdots$	$-q/p$	$\cdots$
$f(x)$	$+$	0	$-$
$f'(x)$	$-$	$-$	$-$
$V(x)$	1	0	0

である．表からわかるように，零点通過のときに符号変化数 $V(x)$ の値が1減っている．これらの表を左から右（$x = -\infty$ から $x = \infty$）の方に見ていくと次のことが分かる．

x が零点通過直前，$f(x)$ と $f'(x)$ は異符号
x の零点通過の付近，$f'(x)$ の符号不変
x が零点通過直後，$f(x)$ と $f'(x)$ は同符号

これらの事から $V(x)$ は，区分的に整数値，非増加，右連続関数である．さらに，

$$V(-\infty) - V(\infty) = \text{方程式の解の全個数}$$

であることもわかる．これらの性質から $f(x)$ が1次式の場合に上記のスツルムの定理が成立している．また，

これらの $V(x)$ が持つ性質は，重解をもたない一般の多項式が零点を通過する際に $f(x)$ と $f'(x)$ の間の符号変化数に対しても成り立つことである．

次に，2次式の場合を考えよう．

2次式の場合　2次の係数は1としても一般性を失わない．

$$f(x) = x^2 + px + q$$

とおく．$f'(x) = 2x + p$ から，平方完成により

$$f(x) = \frac{f'(x)}{4} \cdot f'(x) - \frac{D}{4}$$

である．ただし，

$$\text{判別式 } D = p^2 - 4q$$

したがって $\{f(x), f'(x), D\}$ がスツルム列となる．

$D > 0$ のとき，相異なる2実根を α, β とおく．

	$\cdots$	α	$\cdots$	$-p/2$	$\cdots$	β	$\cdots$
$f(x)$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$f'(x)$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
D	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$V(x)$	2	1	1	1	1	0	0

表より，零点通過のときに符号変化数 $V(x)$ の値が1減っている．$f(x)$ の零点 $(x = \alpha,\ \beta)$ の前後に注目する．$f'(x)$ の符号は零点の前後で変化しない．$D > 0$ であるので，$V(x)$ の値の変動は $f(x)$ と $f'(x)$ の間の符号変化数の変動そのものである．ここの部分だけの表をみると，1次関数のときの表と同じパターンであることがわかる．すなわち $V(x)$ は1減るのである．

$f'(x)$ の零点 $(x = -p/2)$ の前後に注目する．この零点においては

$$f(x) = \frac{f'(x)}{4} \cdot f'(x) - \frac{d}{4}$$

と $D > 0$ より，$f(x)$ は0ではなく D と異符号の $f(x) < 0$ である．$x = -p/2$ の前後では上から

$$- \cdot +$$

の形で，"・" の中に，"$-$"，"0"，"$+$" が入っている．したがって，これらの符号変化数は，いずれも1である．結局，$f'(x)$ の零点 $(x = -p/2)$ の前後で符号に変動があるが，$V(x)$ の値は不変である．したがって，$f(x)$ が零点を通過するごとに，$V(x)$ の値は1減るのである．

次に $D < 0$ のとき，常に $f(x) > 0$ であり，$f(x) = 0$ は実数解をもたない．

	$\cdots$	$-p/2$	$\cdots$
$f(x)$	$+$	$+$	$+$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
D	$-$	$-$	$-$
$V(x)$	1	1	1

上から,

$$+ \cdot -$$

の形で, ”・”の中に, ”$-$”, ”0”, ”$+$”が入っている. したがって, これらの符号変化数は, いずれも1である. 結局, $f'(x)$ の零点 $(x=-p/2)$ の前後で符号に変動があるが,$V(x)$ の値は不変である.

つでに本論とははずれるが, 参考のために, $D=0$のときも調べておく. 常に$f(x)\geq 0$であり, $f(x)=0$はただ一つの重解をもつ.

	$\cdots$	$-p/2$	$\cdots$
$f(x)$	$+$	0	$+$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
D	0	0	0
$V(x)$	1	0	0

となっている.

高校1年生で, 2次関数のさまざまな問題を解かせて多くの生徒を悩ましているが上記3つの表から, 従来とはちがった観点でそれらの問題を系統的に解くことを可能とする.

本論にもどろう. 実は, 1次関数と2次関数で考察したことで本質は尽きている. 念のために, 3次関数の例を一つ挙げてこのことを確認しよう.

3次式の場合

$$f(x)=x^3-x$$

とする. Sturm列は

$$\{f_0(x), f_1(x), f_2(x), f_3(x)\}$$

である. ただし,

$$f_0(x)=f(x)=x^3-x,\quad f_1(x)=f'(x)=x^2-\frac{1}{3},\quad f_2(x)=x,\quad f_3(x)=1$$

である. これより,

	$\cdots$	-1	$\cdots$	$\sqrt{\frac{1}{3}}$	$\cdots$	0	$\cdots$	$-\sqrt{\frac{1}{3}}$	$\cdots$	1	$\cdots$
$f_0(x)$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$f_1(x)$	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$f_2(x)$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$f_3(x)$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$V(x)$	3	2	2	2	2	1	1	1	1	0	0

1次式,2次式のときと同様に, 零点通過のときのみにに符号変化数 $V(x)$ の値が1減っているのがわかる. さらに, $f_1(x), f_2(x)$ の零点の前後では符号変化数は変化しない.

5 スツルムの定理の証明

ここまでスツルムの定理について説明してきたが, 定理の証明をする. スツルム列が4つの関数

$$\{\ f_0(x),\ f_1(x),\ f_2(x),\ f_3(x)\}$$

からなる場合で説明する. ただし,

$$\begin{array}{rcl} f_0(x) & := & f(x) \\ f_1(x) & := & f'(x) \\ f_2(x) & := & q_1(x)f_1(x) - f_2(x) \\ f_2(x) & := & q_2(x)f_2(x) - f_3(x) \\ f_3(x) & \text{は} & 0\text{でない定数} \end{array}$$

である. なお $q_1(x)$, $q_2(x)$ は多項式である.

$V(x)$ の値の変動がある可能性があるのは $f_0(x)$, $f_1(x)$, $f_2(x)$ のどれかが0になるときである. しかし, $V(x)$ の値を変動させるのは, $f_0(x)$ が零点を通過するときだけであることを示していく.

まず,

隣り合う2つの関数は同時に0にはならない

ことを確認しておく. なぜならば, もしも同時に0になったとすると, 上式を芋づる式にたどっていくと $f_3(x)$ が0になってしまう. これは, $f_3(x)$ が0でない定数であることに矛盾する. したがって, 関数値が0となる添え字は少なくとも1つおきに現れる. 関数値が0となる添え字とその前後をまとめて1組と考えて符号変化数を考えればいい.

[$f_0(z) \neq 0$ のとき]

$f_1(z), f_2(z), f_3(z)$ のどれかが0になったときのみ $x = z$ の前後で $V(x)$ の値が変動する可能性がある. $f_1(z), f_2(z), f_3(z)$ のどれかが0になったときは, その添え字は少なくとも一つおきにあらわれるので, 0となる添え字とその前後をまとめて1組と考えてブロックに小分けして符号変化数の変動を見れば良い.

このブロックの添え字の前後では値は0でなく異符号である. 関数の連続性より, $x = z$ の前後でこのブロック内での符号変化数は変動しない.

ブロック以外のところは, $x = z$ で値は0でないので, 関数の連続性よりその前後で符号は変化せず, 符号変化数に影響を及ぼさない.

したがって, この状況では, $x = z$ の前後で $V(x)$ の値は変動しない.

[$f_0(z) = 0$ のとき]

$f_2(z)$ が0になる可能性はあるが, 上の議論をそのまま繰り返すことにより, $f_1(z), f_2(z)$ の部分は $x = z$ の前後で符号変化数は変動しない.

$f_0(z), f_1(z)$ の符号変化数の変動が $V(x)$ の変動となるのである.

$f_1(z) \neq 0$ であることより, $f_0(z), f_1(z)$ 部分の符号変化数は, $x = z$ のところで1減少する.

したがって，この状況では，$x = z$ を通過するとき $V(x)$ の値は 1 減少する．
以上より，$f(x)$ の零点を通過するごとに $V(x)$ の値は 1 減ることが示された．
Sturm 列が 4 個の場合を説明したが，任意の個数であっても証明は全く同じである．

本内容の詳細について興味のある方は，数学セミナーの連載記事 ([5]) をご覧下さい．

参考文献

[1] Eugene Salamin, Computation of π using arithmetic-geometric mean. Math. Comp. 30 (1976), no. 135, 565–570.

[2] S. Kosugi, Y. Morita and S. Yotsutani, Stationary solutions to the one-dimensional Cahn-Hilliard equation: proof by the complete elliptic integrals, Discrete Contin. Dyn. Syst., **19** (2ppppp007), 609–629.

[3] 竹之内脩－伊藤隆，π– π の計算　アルキメデスから現代まで –, 共立出版，2007.

[4] 村井-松本 - 四ツ谷: 日本数学会 2010 年度年会　函数方程式論分科会アブストラクト．

[5] 四ツ谷-村井: 楕円関数と友達になろう一微分方程式の解の全体像を求めて一，数学セミナー, 2011 年 4 月号～2012 年 4 月号, 日本評論社.